

**Тема:** Поняття первісної. Основна властивість первісних

**Мета:**

- *Навчальна:* сформулювати означення первісної, основну властивість первісних, поняття невизначеного інтегралу, розглянути таблицю первісних деяких основних функцій;
- *Розвиваюча:* розвивати вміння розв'язувати завдання на основі отриманих знань;
- *Виховна:* виховувати інтерес до вивчення точних наук; виховувати звичку охайно оформлювати конспект;

**Компетенції:**

- Спілкування державною мовою (уміння ставити запитання і розпізнавати проблему; міркувати, робити висновки на основі інформації, поданої в науковій презентації)

**Тип уроку:** засвоєння нових знань;

**Обладнання:** опорний конспект, навчальна презентація, мультимедійне обладнання;

## Хід уроку

### I. Організаційний етап

- Привітання
- Перевірка присутніх на уроці
- Налаштування на роботу

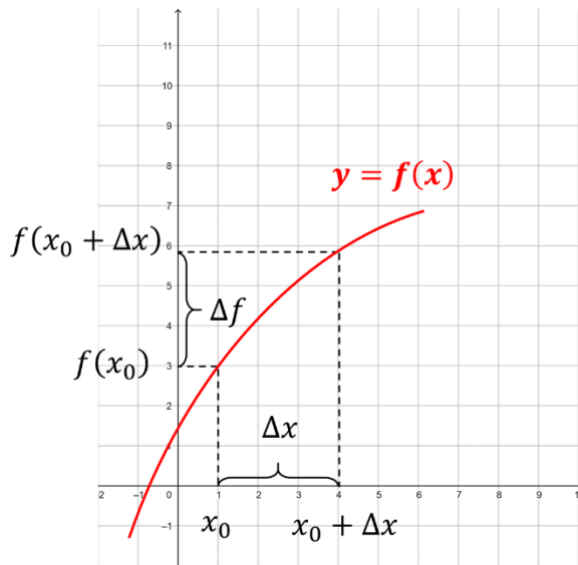
### II. Актуалізація опорних знань

#### ➤ Що ми називаємо похідною функції?

*Сформулюйте означення похідної функції  $f$  у точці  $x_0$*

Похідною функції  $f$  у точці  $x_0$  називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції  $f$  у точці  $x_0$  до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Також можливий інший запис:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

➤ Пригадаємо таблицю похідних деяких основних функцій

$(kx + b)' =$	$k$	
$b' =$	$0$	
$x' =$	$1$	
$(x^n)' =$	$nx^{n-1}$	Для $\forall n$ , крім 0
$\left(\frac{1}{x}\right)' =$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
$(\sqrt{x})' =$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$(\sin x)' =$	$\cos x$	
$(\cos x)' =$	$-\sin x$	

- **Як називається операція знаходження похідної функції?**  
(Операція знаходження похідної функції  $g$  називається диференціюванням функції  $g$ )
- **Якщо функція має похідну в точці, як називають таку функцію?**  
(Якщо функція  $g$  має похідну в точці  $x_0$ , то цю функцію називають **диференційовною** в точці  $x_0$ )



- Якщо функція диференційовна в кожній точці області визначення, як називають таку функцію?  
(Якщо функція  $g$  диференційовна в кожній точці області визначення, то така функція називається **диференційовною**)
- Знаючи закон руху матеріальної точки  $s(t)$ , як можемо знайти закон зміни швидкості  $v(t)$ ?  
 $v(t) = s'(t)$ 
  - Проблемне питання:  
**Чи можемо визначити закон руху  $s(t)$ , якщо відомо  $v(t)$ ?**  
  
Так, необхідно відновити функцію за її похідною.  
Знаходження функції за її похідною називають **інтегруванням**.

### III. Вивчення нового матеріалу

- **Первісна**

*Означення*

Функцію  $F$  називають первісною функцією функції  $f$  на проміжку  $I$ , якщо для всіх  $x \in I$  виконується рівність  $F'(x) = f(x)$

*Можливий запис у зошиті:*

$F(x)$  - первісна для  $f(x)$  на проміжку  $I$ , якщо  $\forall x \in I$   
 $F'(x) = f(x)$

Наприклад:

$F(x) = x^3$	Первісна для	$f(x) = 3x^2$	
$F(x) = \frac{1}{x}$	Первісна для	? (запитати учнів, до якої функції на їх думку буде первісною ця функція)	$f(x) = -\frac{1}{x^2}$
$F(x) = \sin x$	Первісна для	? (запитати учнів, до якої функції на їх думку буде первісною ця функція)	$f(x) = \cos x$



- Основна властивість первісної

➤ Знайдіть похідну для функцій:

$$y = x^3 + 4 \quad // \quad y = 3x^2$$

$$y = x^3 - 7 \quad // \quad y = 3x^2$$

➤ Скільки первісних має функція  $y = 3x^2$   
(Безліч)

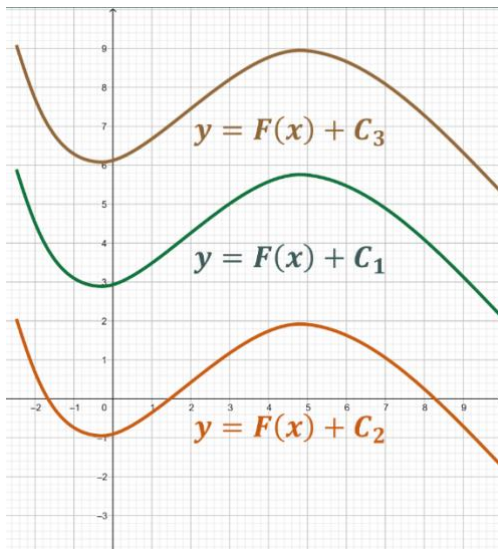
### Теорема (основна властивість первісної)

Якщо функція  $F$  є первісною функції  $f$  на проміжку  $I$  та  $C$  – довільне число, то функція  $y = F(x) + C$  також є первісною функції  $f$  на проміжку  $I$ .



Будь-яку первісну функції  $f$  на проміжку  $I$  можна подати у вигляді  $y = F(x) + C$   
 $C$  – деяке число

$y = F(x) + C$  – загальний вигляд первісних функції  $f$  на проміжку  $I$ .



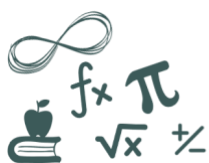
➤ Беручи до уваги основну властивість первісних, як можемо отримати графіки будь-яких двох первісних для даної функції?  
(Паралельним перенесенням уздовж осі ординат)

**Графіки будь-яких первісних для заданої функції одержують один з одного паралельним перенесенням уздовж осі  $Oy$ .**

Сукупність усіх первісних  $y = f(x)$  на проміжку  $I$  називається *невизначеним інтегралом*:

$$\int f(x) dx \quad (\text{«інтеграл еф від ікс де ікс»})$$

Під час розв'язування задач можна використовувати таблицю первісних, яку можна знайти на форзаці підручника. (Або роздрукувати учням таблицю первісних, що прикріплена до цього уроку. За необхідності також додається таблиця похідних)



Таблиця первісних деяких функцій

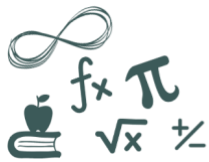
Функція $f$	Первісна функції $f$
$k$ (стала)	$kx$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}, x \neq 0$	$\ln x $
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$a^x$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$e^x$	$e^x$

IV. Закріплення нових знань та вмінь учнів

№1

Установіть, чи є функція  $F$  первісною функції  $f$ :

- 1)  $F(x) = 3x^2 + x - 2, f(x) = 6x + 1$
- 2)  $F(x) = x^{-4}, f(x) = -4x^{-5}$  на проміжку  $(0; +\infty)$
- 3)  $F(x) = \sin x + 3, f(x) = \cos x + 3$
- 4)  $F(x) = 5^x, f(x) = 5^x \ln 5$



**Розв'язок:**

1)  $F(x) = 3x^2 + x - 2, f(x) = 6x + 1$

Так як проміжок не вказаний, то мається на увазі проміжок  $(-\infty; +\infty)$   
 $F'(x) = 6x + 1 \Rightarrow$  функція  $F$  є первісною функції  $f$  на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ , так як  $F'(x) = 6x + 1 = f(x)$

2)  $F(x) = x^{-4}, f(x) = -4x^{-5}$  на проміжку  $(0; +\infty)$

На проміжку  $(0; +\infty)$ ,  $F'(x) = -4x^{-5} = f(x) \Rightarrow$   
функція  $F$  є первісною функції  $f$

3)  $F(x) = \sin x + 3, f(x) = \cos x + 3$

$F'(x) = \cos x \Rightarrow$  функція  $F$  не є первісною функції  $f$  на проміжку  $(-\infty; +\infty)$  так як  $F'(x) = \cos x \neq f(x)$

4)  $F(x) = 5^x, f(x) = 5^x \ln 5$

$F'(x) = 5^x \ln 5 \Rightarrow$  функція  $F$  є первісною функції  $f$  на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ , так як  $F'(x) = 5^x \ln 5$

**№2**

Чи є функція  $F(x) = \frac{1}{x^2}$  первісною функції  $f(x) = -\frac{2}{x^3}$  на проміжку:

- 1)  $(0; +\infty)$ ;
- 2)  $(-\infty; 0]$ ;

**Розв'язок:**

Так як  $F(x)$  і  $f(x)$  не визначені для  $x = 0$ :

- 1) Так (нуль не включається у проміжок);
- 2) Ні (нуль включається у проміжок);

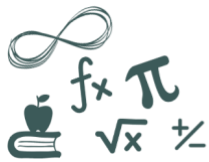
**№3**

Знайдіть загальний вигляд первісних функцій:

- 1)  $f(x) = 5$
- 2)  $f(x) = x$
- 3)  $f(x) = x^6$
- 4)  $f(x) = 2^x$
- 5)  $f(x) = \frac{1}{x^7}$  на проміжку  $(-\infty; 0)$
- 6)  $f(x) = \sqrt[5]{x}$  на проміжку  $(-\infty; -3)$
- 7)  $f(x) = x^{-5}$  на проміжку  $(0; +\infty)$

**Розв'язок:**

- 1)  $F(x) = 5x + C$
- 2)  $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$



- 3)  $F(x) = \frac{x^7}{7} + C$
- 4)  $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$
- 5)  $F(x) = -\frac{1}{6x^6} + C$
- 6)  $F(x) = \frac{5}{6}x\sqrt[5]{x} + C = \frac{5}{6}\sqrt[5]{x^6} + C$
- 7)  $F(x) = \frac{x^{-4}}{-4} + C$

### №4

Для функції  $f$  знайдіть первісну, графік якої проходить через указану точку:

- 1)  $f(x) = x^2$ ,  $A(-1; 3)$
- 2)  $f(x) = \sin x$ ,  $B(\pi; -1)$
- 3)  $f(x) = e^x$ ,  $C(0; -6)$

#### Розв'язок:

- 1)  $f(x) = x^2$ ,  $A(-1; 3)$

Знайдемо первісну:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

Підставимо значення функції в заданій точці та знайдемо значення  $C$ :

$$3 = \frac{(-1)^3}{3} + C$$

$$C = 3 + \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3}$$

$$\text{Відповідь: } F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\frac{1}{3}$$

- 2)  $f(x) = \sin x$ ,  $B(\pi; -1)$

Знайдемо первісну:

$$F(x) = -\cos x + C$$

Підставимо значення функції в заданій точці та знайдемо значення  $C$ :

$$-1 = -\cos \pi + C$$

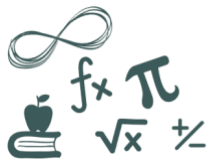
$$C = -1 - 1 = -2 \text{ (Так як } \cos \pi = -1)$$

$$\text{Відповідь: } F(x) = -\cos x - 2$$

- 3)  $f(x) = e^x$ ,  $C(0; -6)$

Знайдемо первісну:

$$F(x) = e^x + C$$



Підставимо значення функції в заданій точці та знайдемо значення  $C$ :

$$-6 = e^0 + C$$

$$C = -6 - 1 = -7$$

$$\text{Відповідь: } F(x) = e^x - 7$$

### №5

Для функції  $f$  знайдіть на проміжку  $I$  первісну  $F$ , яка набуває даного значення у вказаній точці:

$$1) f(x) = \frac{1}{x^2}, I = (0; +\infty), F\left(\frac{1}{3}\right) = -9$$

$$2) f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$$

$$3) f(x) = \frac{1}{x}, I = (-\infty; 0), F(-e^3) = 7$$

#### Розв'язок:

$$1) f(x) = \frac{1}{x^2}, I = (0; +\infty), F\left(\frac{1}{3}\right) = -9$$

Знайдемо первісну:

$$F(x) = -\frac{1}{x} + C$$

Підставимо значення функції в заданій точці та знайдемо значення  $C$ :

$$-9 = -\frac{1}{\frac{1}{3}} + C$$

$$-9 = -3 + C$$

$$C = -6$$

$$\text{Відповідь: } F(x) = -\frac{1}{x} - 6$$

$$2) f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$$

Знайдемо первісну:

$$F(x) = \operatorname{tg} x + C$$

Підставимо значення функції в заданій точці та знайдемо значення  $C$ :

$$3\sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + C$$

$$3\sqrt{3} = \sqrt{3} + C$$

$$C = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Відповідь: } F(x) = \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3}$$





3)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $I = (-\infty; 0)$ ,  $F(-e^3) = 7$

Знайдемо первісну:

$$F(x) = \ln|x| + C$$

Підставимо значення функції в заданій точці та знайдемо значення  $C$ :

$$7 = \ln|-e^3| + C$$

$$7 = 3 + C$$

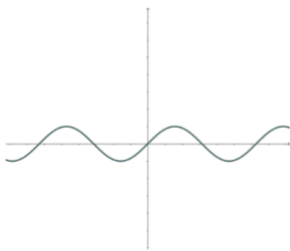
$$C = 4$$

Так як на проміжку  $(-\infty; 0)$   $\ln|x| = \ln(-x) \Rightarrow F(x) = \ln(-x) + 4$

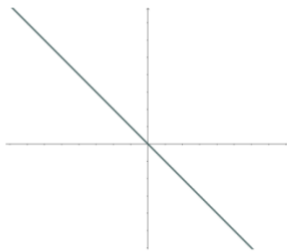
Відповідь:  $F(x) = \ln(-x) + 4$

№6

Укажіть на рисунку графік, який може бути графіком первісної функції  $f(x) = \cos 3$



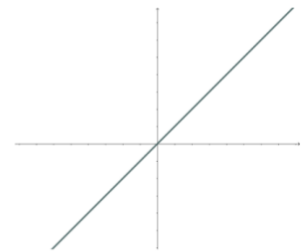
а



б



в



г

$\cos 3$  – стала величина  $\Rightarrow F(x) = x \cos 3 + C$ ;

$\cos 3 < 0 \Rightarrow$  графіком первісної може бути **Б**

Відповідь: Б

№7

Для функції  $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$  знайдіть які-небудь дві первісні, відстань між відповідними точками графіків яких (тобто точками з рівними абсцисами) дорівнює 2.

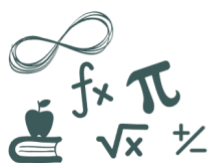
**Розв'язок:**

$$f(x) = -\left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right)$$

$$f(x) = -\cos x \text{ (Так як } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

Знайдемо первісну:

$$F(x) = -\sin x + C$$



Відповідь:  $F_1(x) = -\sin x + 4$ ;  $F_2(x) = -\sin x + 6$

### V. Підсумок уроку

- Що ми називаємо диференціюванням функції?
- Що ми називаємо інтегруванням функції?
- Сформулюйте означення первісної функції
- Сформулюйте основну властивість первісної
- Що ми називаємо невизначеним інтегралом?

### VI. Домашнє завдання

Опрацювати §2, опрацювати Виконати № 9.2; 9.5(1-4, 6); 9.7; 9.9(1,2); 9.11	Мерзляк А.Г.
Опрацювати §8, опрацювати Виконати № 8.4; 8.6; 8.8; 8.14; 8.16	Істер О.С.
Опрацювати §6 (ст.76), опрацювати Виконати № 6.2 (1,2); 6.6 (3,4,5,8); 6.8	Нелін Є.П.
Опрацювати §5 (ст.45), опрацювати Виконати № 201, 204, 205, 206 208,	Бевз Г.П.